

**Sprawdzian „POTĘGA MATEMATYKI”
dla uczniów klas pierwszych szkół ponadgimnazjalnych - 2012**

Zadanie 6. (5 punktów) Grupa B

Rodzice – zaprzyjaźnieni od czasów gdy ich dzieci uczęszczały do tego samego przedszkola – wybrali się ze swymi dziećmi do kina, aby na dużym ekranie oglądać transmisję meczu Polska-Grecja inaugurującego fazę grupową Mistrzostw EURO 2012. Bilet dla osoby dorosłej kosztował 5 zł, a dla dziecka był o 40% tańszy. Za wszystkie bilety zapłacono 45 zł. Ilu w tej grupie mogło być rodziców, a ile dzieci?

KRYTERIA OCENY ZADANIA 6

Zad. 6. 5 pkt.	<ul style="list-style-type: none"> Postęp niewielki <i>Jeżeli uczeń nie zapisze założeń, ale z toku dalszego rozumowania wynika, że je stosuje, przyznajemy ten 1 pkt. Punkt za postęp niewielki przyznajemy jedynie w sytuacji, gdy uczeń uzyska jeszcze przynajmniej 1 pkt. z pozostałych czynności.</i> 	1 p.	<ul style="list-style-type: none"> Założenie, że liczby rodziców i dzieci są naturalne, $r \geq 2$ („rodzice” w treści zad. występują w liczbie mnogiej, więc jest ich co najmniej dwoje) oraz $d \geq r/2$ (każde dziecko ma nie więcej niż dwoje rodziców) 	RiN	C	IV Strategia	A
	<ul style="list-style-type: none"> Postęp istotny Pokonanie zasadniczych trudności 	2 p. 3 p.	<ul style="list-style-type: none"> Zapis zależności na sumę wydatków na bilety Modelowanie, np. przez podstawianie kolejnych liczb naturalnych od $r=2$ i wyznaczanie możliwej liczby dzieci (spełniającej założenia) 				M A
	<ul style="list-style-type: none"> Rozwiązanie poprawne niepełne 	4 p.	<ul style="list-style-type: none"> Wyznaczenie jednej grupy rodziców i odpowiadającej im liczby dzieci 				A
	<ul style="list-style-type: none"> Pełne rozwiązanie 	5 p.	<ul style="list-style-type: none"> Wyznaczenie dwóch możliwych grup rodziców i dzieci. 				A

WSKAZYWANIE KIERUNKU ROZWOJU UCZNIĄ

Wymaganie ogólne PP	Umiejętności ucznia:
Obiekt	<p>Pojęcia:</p> <ul style="list-style-type: none"> Procent Równanie z dwiema niewiadomymi Rozwiązać równanie z dwiema niewiadomymi Analiza treści zadania, wypisanie założeń <p>Uczeń używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników. Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.</p>
Reprezentacja	<ul style="list-style-type: none"> Obliczenia procentowe Rozwiązanie równania z dwiema niewiadomymi <p>Uczeń rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.</p>

Model
 Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.
 Uczeń buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.

1. Ustalenie pary liczb naturalnych spełniających warunki zadania:

Liczba rodziców – r
 Liczba dzieci – d
 Cena biletu rodzica – 5 zł
 Cena biletu dziecka – $0,6 \cdot 5 = 3$ zł
 Łączny koszt biletów – 45 zł

$45 = 5r + 3d$

$r \geq 2, d \geq 1$

$45 = 5 \cdot 2 + 35 = \underline{5 \cdot 3 + 3 \cdot 10} = 5 \cdot 4 + 25 = 5 \cdot 5 + 20 = \underline{5 \cdot 6 + 3 \cdot 5} = 5 \cdot 7 + 10 = 5 \cdot 8 + 5$

Warunki zadania spełniają tylko:

→ Grupa I = 3 rodz. + 10 dzieci

→ Grupa II = 6 rodz. + 5 dzieci

Odp. Do kina mogły pójść 3 osoby dorosłe i 10 dzieci lub 6 osób dorosłych i 5 dzieci.

2. Ustalenie pary liczb naturalnych spełniających warunki zadania – analiza w tabeli:

Liczba rodziców – r, $r \geq 2$

Liczba dzieci – d, $d \geq 1$

r, d – liczby naturalne

Cena biletu rodzica – 5 zł

Cena biletu dziecka – $0,6 \cdot 5 = 3$ zł

Łączny koszt biletów – 45 zł

$45 = r \cdot 5 + d \cdot 3$

Dyskusja liczby rozwiązań	l. rodz. $r \geq 2$	l. dzieci $d \geq 1$	Możliwe rozwiązania
$45 = 2 \cdot 5 + 35$	2	-	
$45 = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 10$	3	10	+
$45 = 4 \cdot 5 + 25$	4	-	
$45 = 5 \cdot 5 + 20$	5	-	
$45 = 6 \cdot 5 + 5 \cdot 3$	6	5	+
$45 = 7 \cdot 5 + 10$	7	-	
$45 = 8 \cdot 5 + 5$	8	-	

Odp. Do kina mogły pójść 3 osoby dorosłe i 10 dzieci lub 6 osób dorosłych i 5 dzieci.

3. Rozwiązanie oryginalne:

Cena biletu osoby dorosłej – 5 zł

Cena biletu dziecka – $5 - 0,4 \cdot 5 = 3$ zł

Wydana kwota – 45 zł

DOROŚLI		DZIECI		WNIOSKI
r – liczba dorosłych $r \geq 2$	Koszt biletów dorosłych	Kwota, która pozostała na bilety dzieci	d – liczba dzieci $d \in N_+$	
2	10	35	$35 : 3 = 11\frac{2}{3} \notin N_+$	
3	15	30	$d = 30 : 3 = 10$	3 osoby dorosłe, 10 dzieci
4	20	25	$25 : 3 = 8\frac{1}{3} \notin N_+$	
5	25	20	$20 : 3 = 6\frac{2}{3} \notin N_+$	
6	30	15	$d = 15 : 3 = 5$	6 osób dorosłych, 5 dzieci
7	35	10	$10 : 3 = 3\frac{1}{3} \notin N_+$	

Rodziców nie może być więcej niż 7, bo:

- przy 7 rodzicach musiałyby być co najmniej 4 dzieci (3 pary (m+t) z 1 dzieckiem + 1 osoba dorosła z 1 dzieckiem),
- przy 8 rodzicach musiałyby być co najmniej 4 dzieci (4 pary (m+t) z 1 dzieckiem).

3 osoby dorosłe, 10 dzieci – może tak być (każdy rodzic ma kilkoro dzieci)

6 osób dorosłych, 5 dzieci – może tak być (np. 4 osoby dorosłe z 1 dzieckiem + (m+t) z 1 dzieckiem).

Odp. Do kina mogły pójść 3 osoby dorosłe i 10 dzieci lub 6 osób dorosłych i 5 dzieci.

4. Dyskusja liczby rozwiązań równanie z dwiema niewiadomymi:

Liczba rodziców – x ($x \geq 2$, $x \in N_+$)

Liczba dzieci – y ($y \in N_+$)

Cena biletu rodzica – 5 zł

Cena biletu dziecka – $0,6 \cdot 5 = 3$ zł

Łączny koszt biletów – 45 zł $45 = 5x + 3y$

$$y = -\frac{5}{3}x + 15$$

Znajdźmy pary liczby (x, y) spełniające równanie $y = -\frac{5}{3}x + 15$ oraz spełniające warunki zadania.

Biorąc pod uwagę założenie $(y \in \mathbb{N}_+)$ x musi być wielokrotnością liczby 3, czyli $x \in \{3, 6, 9, 12, \dots\}$

Wówczas $y \in \{10, 5, 0, -5, \dots\}$. Tylko liczby 10 i 5 spełniają założenie $(y \in \mathbb{N}_+)$.

Otrzymaliśmy więc dwie pary liczb $(3, 10)$ oraz $(6, 5)$ spełniających warunki zadania.

Odp. Do kina mogły pójść 3 osoby dorosłe i 10 dzieci lub 6 osób dorosłych i 5 dzieci.

5. Rozwiązanie graficzne:

Liczba rodziców – x ($x \geq 2$, $x \in \mathbb{N}_+$)

Liczba dzieci – y ($y \in \mathbb{N}_+$)

Cena biletu rodzica – 5 zł

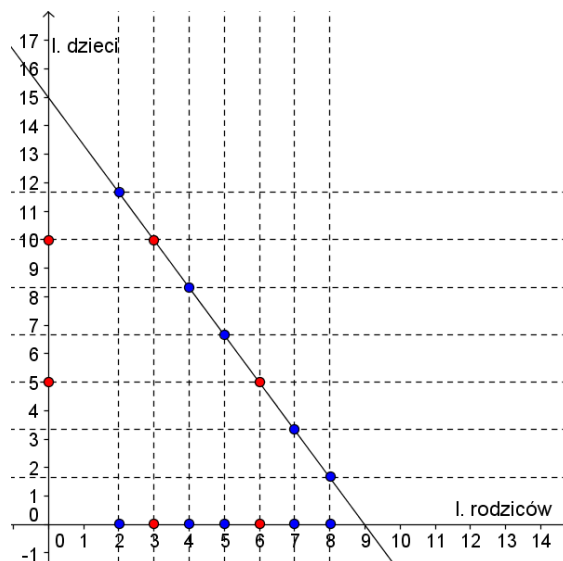
Cena biletu dziecka – $0,6 \cdot 5 = 3$ zł

Łączny koszt biletów – 45 zł

$$45 = 5x + 3y$$

Narysujmy prostą $y = -\frac{5}{3}x + 15$

Szukamy tylko takich punktów leżących na prostej $y = -\frac{5}{3}x + 15$, których obie współrzędne są liczbami naturalnymi, oraz $x \geq 2$, $y \geq 1$



	<p>Sprawdzenie: $45 = 3 \cdot 5 + 10 \cdot 3$ $45 = 6 \cdot 5 + 5 \cdot 3$</p> <p>Odp. Do kina mogły pójść 3 osoby dorosłe i 10 dzieci lub 6 osób dorosłych i 5 dzieci.</p>
Strategia	<p>Np. opisana w modelu metoda graficzna</p> <p>Uczeń tworzy strategię rozwiązania problemu</p>
Rozumowanie i argumentacja	<p>Np. uzasadnienie metody opisanej w rozwiązaniu 3.</p> <p>Uczeń prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków. Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.</p>